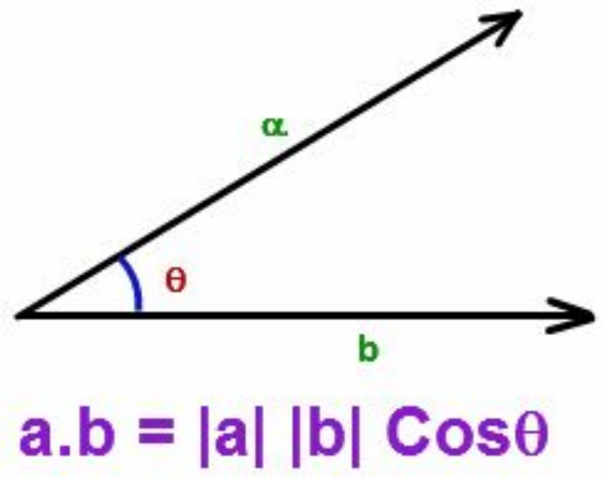
Radial sweep

Aula para Seletiva IOI 2021
Matheus Leal Viana

Produto escalar



O produto escalar a.b de dois vetores **a = (a1, a2, ..., an)** e **b = (b1, b2, ..., bn)** possui duas definições:

- **Definição Algébrica**

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

- **Definição Geométrica**

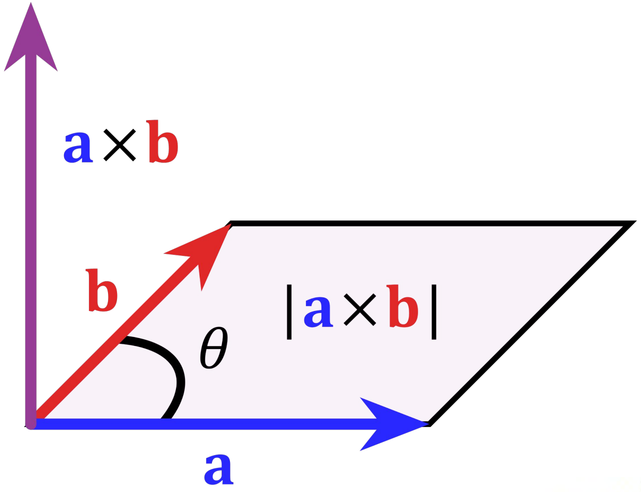
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\| \cos \theta,$$

Produto escalar

Propriedades:

1. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$
2. $(\alpha \cdot \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \alpha \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$
3. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$
4. Tamanho de **a** $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$
5. Projeção de **a** em **b** $\dfrac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$
6. Angulo entre dois vetores $\arccos\left(\dfrac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|}\right)$

Produto Vetorial



O **Produto vetorial** de dois vetores a e b é definido como um vetor C que é perpendicular a ambos a e b, e tamanho igual a área do **paralelograma** gerado pelos vetores a e b

A direção do vetor C é **positiva** se o sentido for **horário** e negativo caso contrário

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\| \sin(\theta) \, \mathbf{n}$$

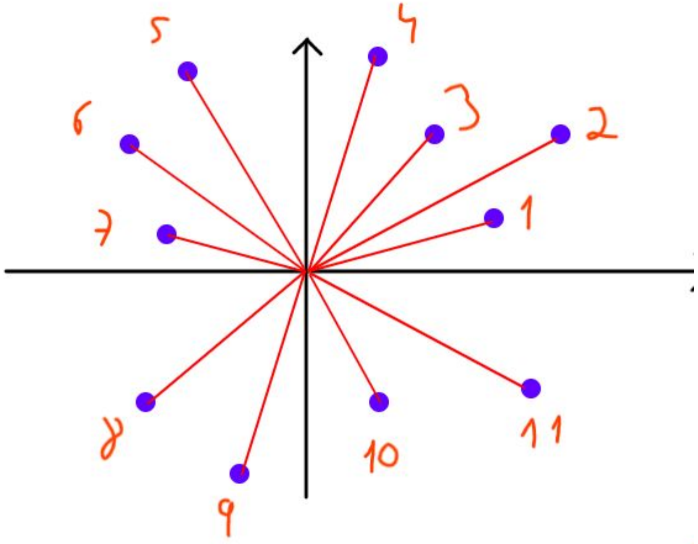
$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (y_1 z_2 - z_1 y_2)\mathbf{e}_x + (z_1 x_2 - x_1 z_2)\mathbf{e}_y + (x_1 y_2 - y_1 x_2)$$

Produto vetorial

Propriedades:

1. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$
2. $(\alpha \cdot \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \alpha \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$
3. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = -\mathbf{a} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{b})$
4. Se e somente se o produto vetorial de **a** e **b** é nulo então **a** e **b** são colineares

Ordenação por ângulo



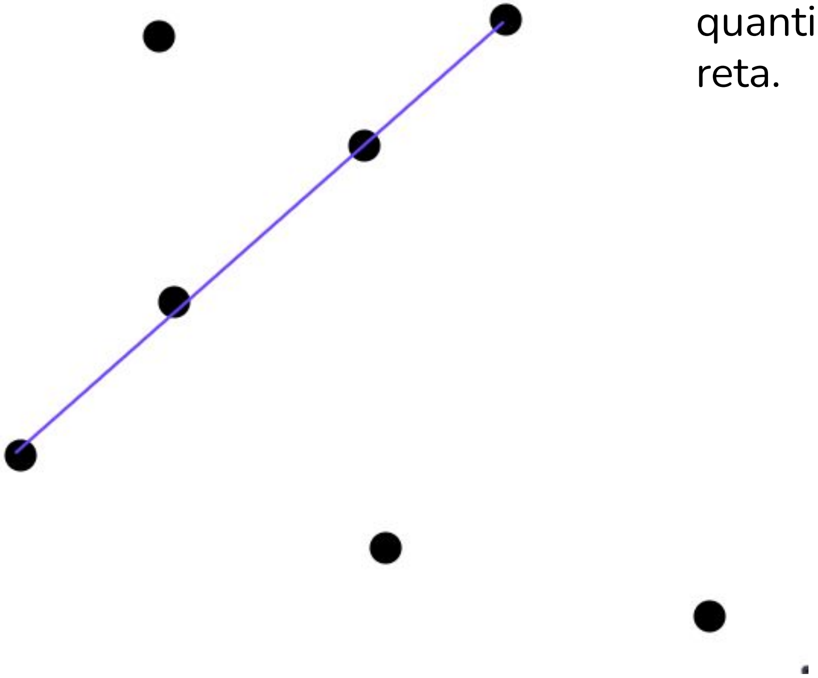
- Devemos ordenar os pontos no sentido horário

- Para comparar dois pontos **P**, **Q**:
  1. Comparar os pontos pelos semiplanos divididos pela reta y = 0
  2. Comparar os pontos pelo produto vetorial
  3. Caso seja necessário para o problema, compare também pela distância do ponto a origem.

Código

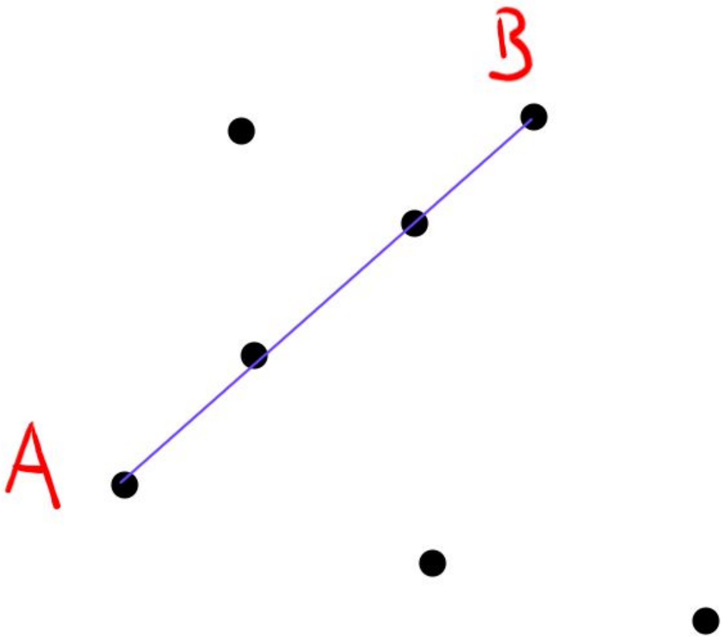
```
struct point{
    int x, y;


    // 0 = Está na metade de cima
    // 1 = Está na metade de baixo
    int half() {
        return y < 0 || (y == 0 && x < 0);
    }

};

int cross(point A, point B){
    return A.x*B.y - B.x*A.y;
}

bool comp(point A, point B){
    if(A.half() != B.half()){
        return A.half() < B.half();
    }

    return cross(A, B) > 0;
}
```

Problema 01



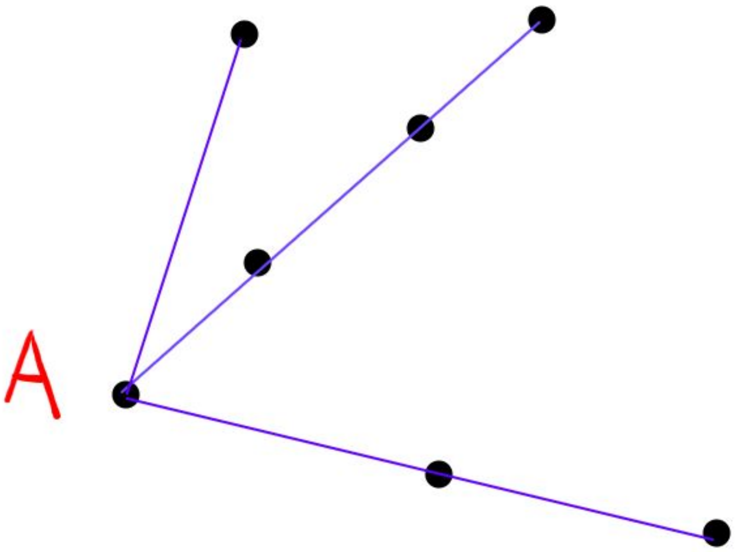
Dado N (1 <= N <= 1000) pontos, determine a maior quantidade de pontos que pertencem a uma mesma reta.

Solução - Problema 01



Solução $O(N^3)$ lenta:
Fixe dois pontos **A** e **B**. Agora temos a reta que liga esses dois pontos. Depois, basta passar por todos os pontos linearmente e verificar se são colineares. (cross = 0)

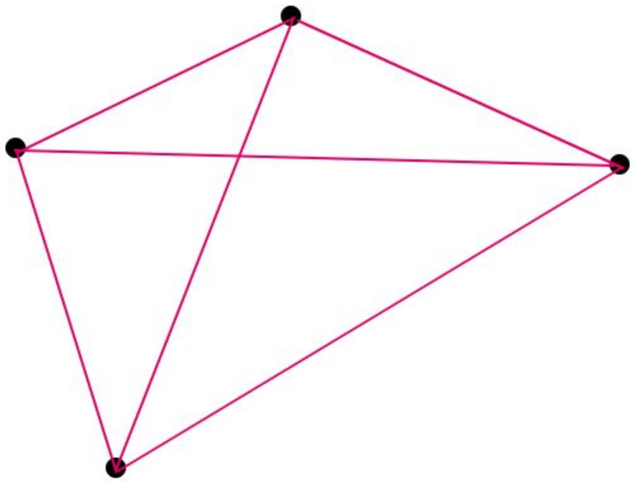
Solução - Problema 01



Solução O(N² log N) Final:

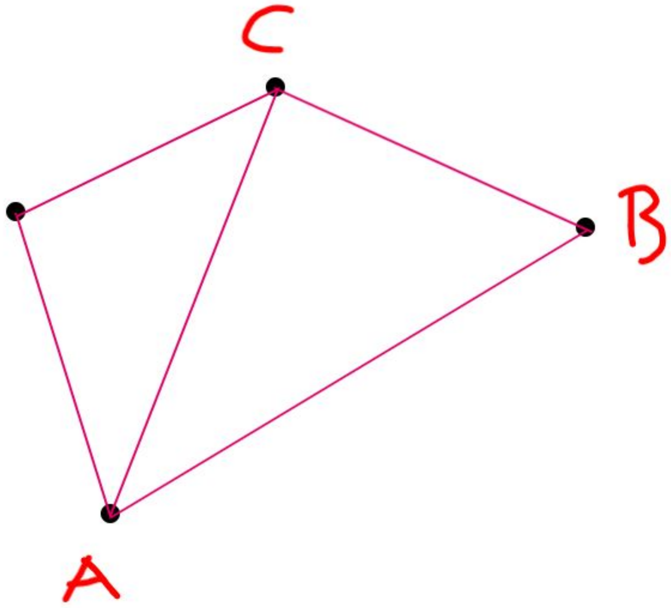
- Fixe apenas um ponto A. Agora ordene todos os pontos pelo ângulo utilizando A como a origem do plano.
- Note que todos os pontos que estão na mesma reta que A é uma extremidade possuem o mesmo ângulo,
- Agora basta percorrer todos os pontos na ordem e contar a maior quantidade que aparece para cada ângulo.

Problema 02 - POI 08 Triangles



Dado N (1 <= N <= 3000) pontos, determine a soma das áreas de todos os triângulos obtidos por quaisquer três pontos.

Solução Problema 02



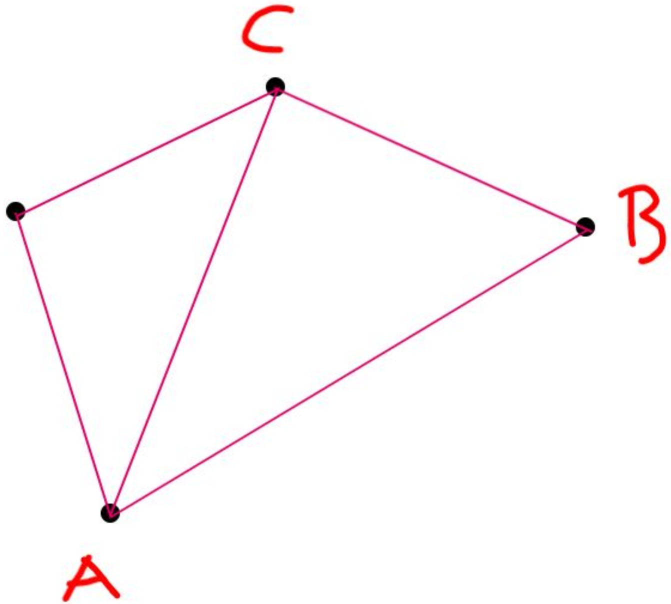
Solução O(N³) Lenta:

- Fixe três pontos **A**, **B** e **C**. A área do triângulo determinado por esses três pontos é:

$$\frac{|\vec{AB} \times \vec{AC}|}{2}$$

- Agora, basta percorrermos todas as triplas de pontos e chegamos em uma solução O(N³)

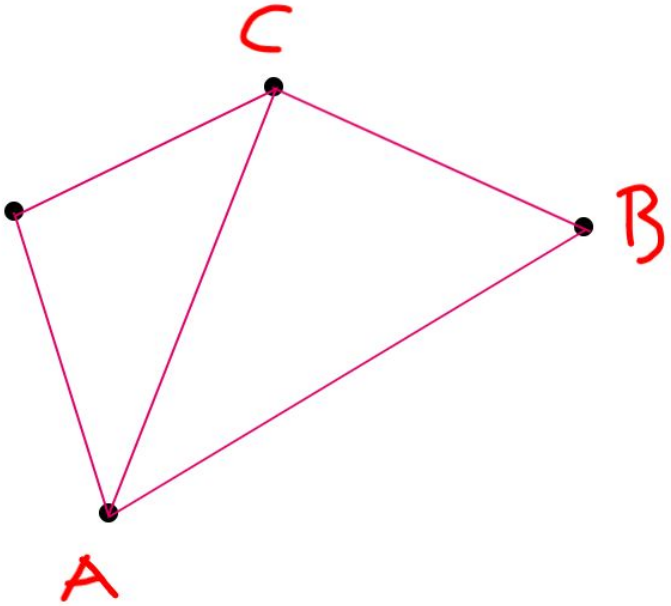
Solução Problema 02



Solução $O(N^2 \log N)$ Final:

- Fixe apenas um dos pontos do triângulo (A)
- Coloque A como sendo a origem do plano
- Então, para todo ponto P, mude as coordenadas: **P(x, y) -> P(x - Ax, y - Ay)**

Solução Problema 02

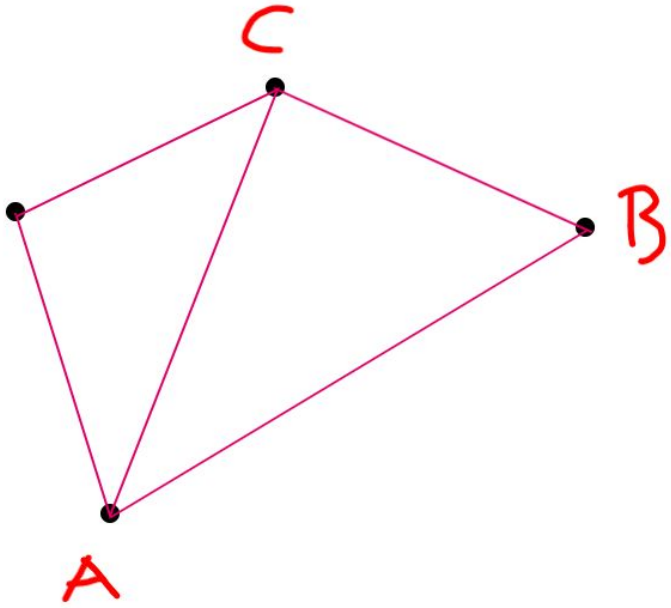


Solução O(N² logN) Final:

- Agora, se soubermos os outros vértices B e C do triângulo, temos que a área do triângulo seria:

$$\frac{|\vec{B} \times \vec{C}|}{2} = \frac{|B_x \cdot C_y - B_y \cdot C_x|}{2}$$

Solução Problema 02



Solução O(N² logN) Final:

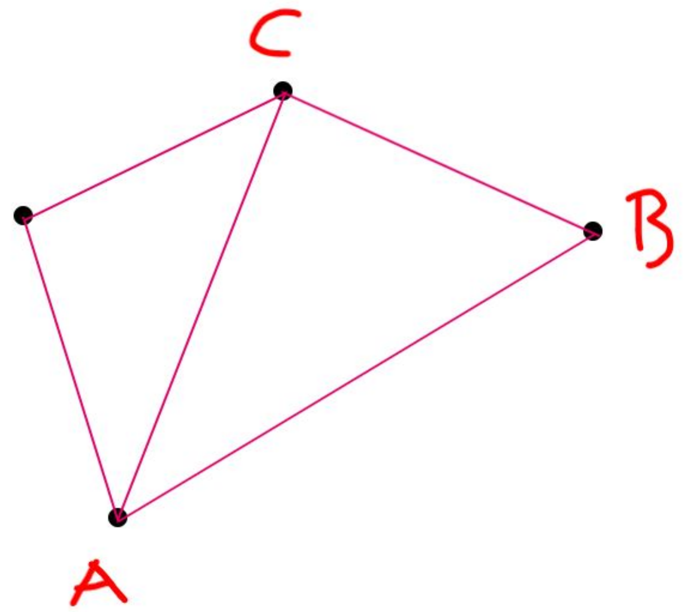
- Agora, assuma que o valor do produto vetorial de B e C é sempre não-negativo.

- Desta forma, a área pode ser representada sem os módulos:

$$\frac{B_x \cdot C_y - B_y \cdot C_x}{2}$$

- Observe que se os pontos estão ordenados pelo ângulo, os possíveis pontos C's que satisfazem a condição é um intervalo contínuo (circular)

Solução Problema 02



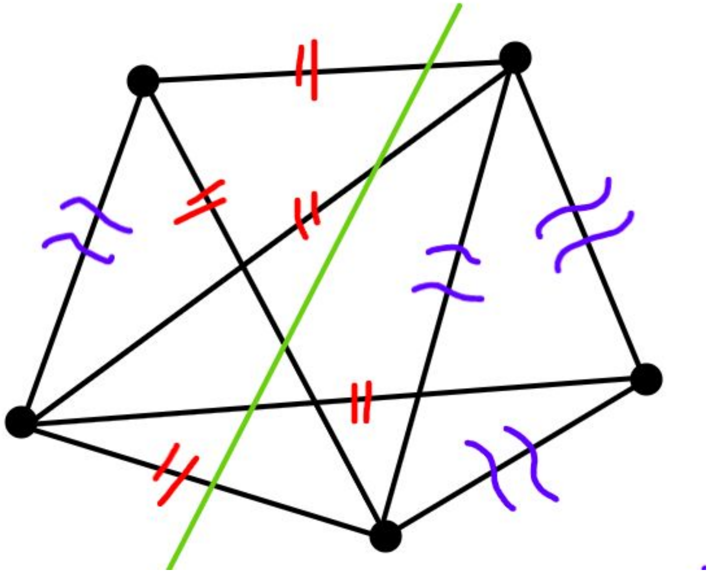
Solução O(N² logN) Final:

- Então, agora temos dois pontos fixos **A** e **B.**
- Assim, considerando todos os pontos **C** possíveis, nossa resposta deve ser aumentada em:

$$\frac{B_x \cdot \sum C_y - B_y \cdot \sum C_x}{2}.$$

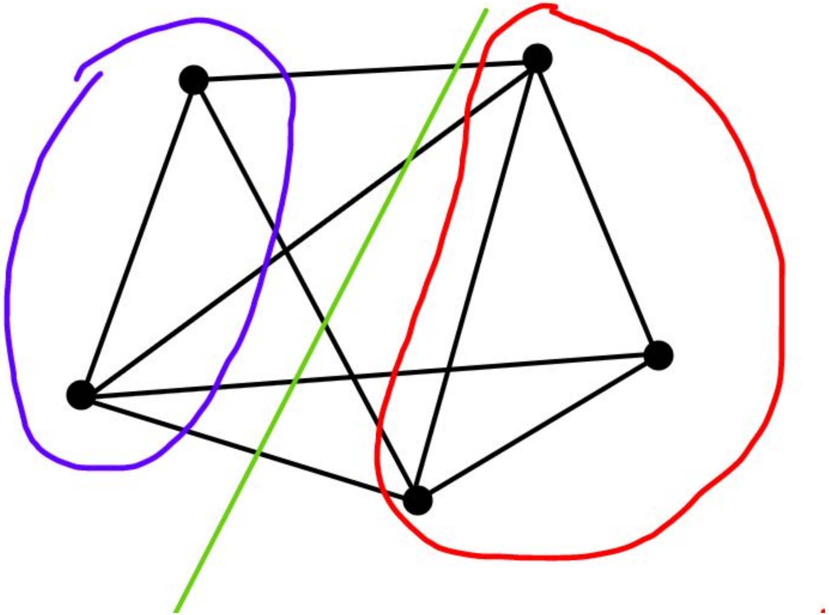
- Como os possíveis pontos **C's** são um intervalo contínuo (circular), então basta fazermos soma de prefixo para otimizar a solução para O(N²logN)

Problema 03



Dado N (1 <= N <= 1000) pontos, para todo par de pontos i, j (i != j) cria-se uma aresta de peso igual ao quadrado da distância euclidiana entre os dois pontos. Você deve traçar uma reta qualquer e seu score será igual a soma dos pesos de todas as arestas que se intersectam na reta que você traçou.

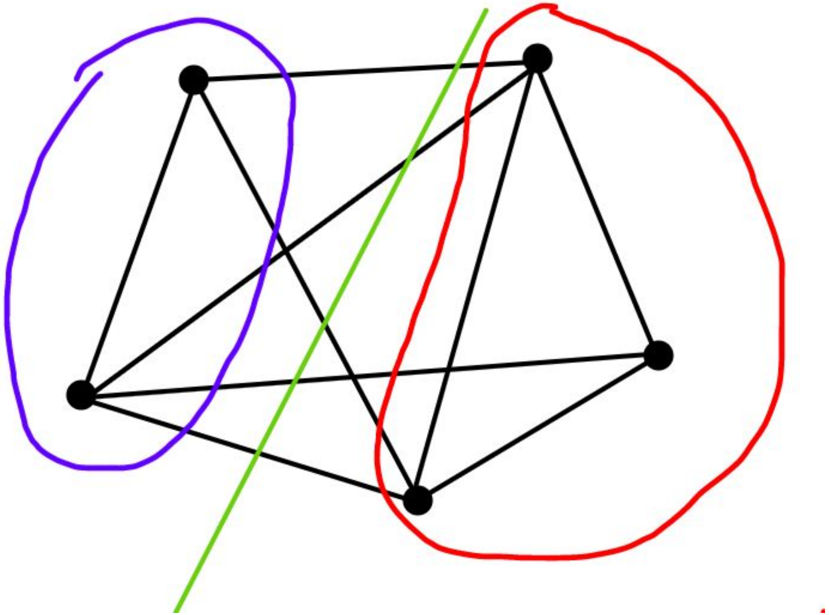
Solução Problema 03



- Observe que quando é traçada uma reta, dividimos os pontos em dois conjuntos, os que estão no semiplano da esquerda e os que estão no semiplano da direita

- Uma aresta passa pela reta se as extremidades dessa arestas estão em conjuntos diferentes

Solução Problema 03



- Agora, precisamos calcular a distância euclidiana para cada par de vértices de um conjunto para o outro.

$$\sum_{i} \sum_{j} (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2$$

$$\sum_{i} \sum_{j} (x_i - x_j)^2 + \sum_{i} \sum_{j} (y_i - y_j)^2$$

Solução Problema 03

$$\sum_i \sum_j (x_i - x_j)^2 = \sum_i \sum_j x_i^2 - 2 x_i x_j + x_j^2$$

$$\sum_i \sum_j x_i^2 - 2 \sum x_i \sum x_j + \sum_i \sum_j x_j^2$$

Solução Problema 03

- Defina:
- |A| = Tamanho do primeiro conjunto
- |B| = Tamanho do segundo conjunto
- S(A, j) = $\sum_{i \in A} X_i^j$
- S(B, j) = $\sum_{i \in B} X_i^j$

Solução Problema 03

$$\sum_i \sum_j x_i^2 - 2 \sum x_i \sum x_j + \sum_i \sum_j x_j^2$$

$$|B| \sum x_i^2 - 2 \sum x_i \sum x_j + |A| \cdot \sum x_j^2$$

$$|B| \cdot S(A,2) - 2 \cdot S(A,1) \cdot S(B,1) + |A| \cdot S(B,2)$$

Solução Problema 03

$$|B| \cdot S(A,2) - 2 \cdot S(A,1) \cdot S(B,1) + |A| \cdot S(B,2)$$

- Note que agora conseguimos calcular o valor do score em O(N)
- Agora, só precisamos saber como achar todas as maneiras de dividir os pontos em dois conjuntos de maneira eficiente.

Solução Problema 03

- Agora, podemos fixar um dos pontos que será a borda de um dos conjuntos

- Depois de fixar este ponto basta ordenar os outros pelo ângulo e achar o intervalo que cada possível reta divide e atualizar os valores que precisamos para cada conjunto.

- Solução $O(N^2 \log N)$

Problemas

Jogo
Triangles
Segment Cutting
Area of effect
Satanic Panic